

No.1 内積の定義

この回のゴール

- $\mathbb{R}^n$ の標準内積と、その 3 つの性質を述べられる.
- 内積空間の定義を述べ、 $\mathbb{R}^n$ 以外の内積 (行列・関数) の例を挙げられる.
- ノルム・角・直交を定義し、計算できる.
- コーシー・シュワルツの不等式と三角不等式を証明できる.

■ 1. 長さや角度をどう入れるか

第 4 章のベクトル空間では、和とスカラー倍しか考えなかった. そこには「長さ」や「角度」はまだない. 高校では、平面や空間のベクトルの内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$ を使って長さや角度を扱った. 成分で書けば $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ である. この章では、内積を出発点にして、長さ・角度・直交をベクトル空間に持ち込む.

■ 2. $\mathbb{R}^n$ の標準内積

定義 1 標準内積

$\mathbf{a} = {}^t(a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = {}^t \mathbf{a} \mathbf{b}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の標準内積という.

注意

- 第 4 章以降 $\langle \rangle$ を「生成される部分空間」の記号に使っているので、このプリントでは内積を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と丸括弧で書く. 本によっては $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ や $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ と書く.
- ${}^t \mathbf{a} \mathbf{b}$ は 1×1 行列 (数) である (第 1 章 No.2 定義 1).

定理 1 標準内積の性質

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ について

$$(I1) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \mathbf{u}) + (\mathbf{b}, \mathbf{u}), \quad (c\mathbf{a}, \mathbf{b}) = c(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (\text{線形性})$$

$$(I2) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (\text{対称性})$$

$$(I3) \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0 \text{ で、等号は } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ のときに限る} \quad (\text{正値性})$$

【証明】(I1)(I2) は定義の式から明らか. (I3) : $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$ で、0 になるのはすべての $a_i = 0$ のとき. $\square$

(I1) と (I2) を合わせると、2 番目の変数についても線形: $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{u})$, $(\mathbf{a}, c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

■ 3. 内積空間

第 4 章でベクトル空間を「8 つの法則」で定義したのと同じように、内積も 3 つの性質で定義する。

定義 2 内積空間

ベクトル空間 V の 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に実数 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ を対応させる規則が、定理 1 の (I1)~(I3) を満たすとき、これを V の**内積**といい、内積が定められたベクトル空間を**内積空間**（計量ベクトル空間）という。

例 1 内積の例

- (a) **重みつき内積**： $\mathbb{R}^2$ で $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2a_1b_1 + 3a_2b_2$. (I3) は $2a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0$ から.
- (b) **行列の内積**： $M_{m,n}(\mathbb{R})$ で $(A, B) = \text{tr}({}^tAB) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$. 成分を 1 列に並べて $\mathbb{R}^{mn}$ の標準内積をとったものと同じ.
- (c) **関数の内積**： $a < b$ とする. $\mathbb{R}[x]_n$ （あるいは区間 $[a, b]$ 上の連続関数全体）で

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

(I3)： $(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0$. $a < b$ のとき、連続関数 f について $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$ なら $f = 0$ である（分野「解析学」第 5 章で厳密に扱う）.

例 2 内積にならない例

$\mathbb{R}^2$ で $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 - a_2b_2$ は (I1)(I2) を満たすが、 $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = -1 < 0$ なので (I3) を満たさず、内積ではない。（相対性理論で使われる「ミンコフスキー空間」は、このような正値でない「内積」を使う。）

コラム：関数の内積の意味

$\int_a^b f(x)g(x) dx$ は、区間を細かく n 等分した点 $x_1, \dots, x_n$ での値を並べたベクトル ${}^t(f(x_1), \dots, f(x_n))$ どちらの標準内積 $\sum f(x_i)g(x_i)$ に、幅 Δx を掛けて $n \rightarrow \infty$ とした極限である。関数を「無限次元のベクトル」と見る考え方は、フーリエ解析や関数解析で中心になる（分野「解析学」第 9 章・第 10 章）.

■ 4. ノルム・角・直交

以下、 V を内積空間とする。

定義 3 ノルム

$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ を $\mathbf{a}$ の**ノルム**（長さ、大きさ）という。 $\|\mathbf{a}\| = 1$ のベクトルを**単位ベクトル**という。 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ なら $\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$ は単位ベクトル（**正規化**という）.

$$\|c\mathbf{a}\| = \sqrt{c^2(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = |c| \|\mathbf{a}\| \text{ である.}$$

定理 2 コーシー・シュワルツの不等式

$|(a, b)| \leq \|a\| \|b\|$. 等号は a, b が 1 次従属のときに限る.

【証明】 $a = 0$ なら両辺 0. $a \neq 0$ とする. 実数 t について, (I3) と (I1)(I2) より

$$0 \leq \|ta + b\|^2 = (ta + b, ta + b) = \|a\|^2 t^2 + 2(a, b)t + \|b\|^2.$$

右辺は t の 2 次式で, すべての t で 0 以上なので, 判別式 ≤ 0 : $(a, b)^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \leq 0$. これが示すべき不等式.

等号は, 判別式 $= 0$, つまり $\|ta + b\| = 0$ となる t が存在するとき. (I3) より $ta + b = 0$, すなわち 1 次従属のときである. $\square$

定理 3 三角不等式

$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

【証明】 コーシー・シュワルツの不等式より $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a, b) + \|b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2$. $\square$

定義 4 角・直交

$a, b \neq 0$ のとき, コーシー・シュワルツの不等式より $-1 \leq \frac{(a, b)}{\|a\|\|b\|} \leq 1$ なので,

$$\cos \theta = \frac{(a, b)}{\|a\|\|b\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を満たす θ がただ 1 つ定まる. これを a と b のなす角という. また, $(a, b) = 0$ のとき a と b は直交するといい, $a \perp b$ と書く (0 はすべてのベクトルと直交するとみなす).

注意

高校では「角度がまずあって, そこから内積を定義した」. ここでは逆に「内積がまずあって, そこから角度を定義」している. コーシー・シュワルツの不等式は, この定義が意味をもつ ($\cos \theta$ が -1 以上 1 以下になる) ことを保証している.

定理 4 ピタゴラスの定理

$a \perp b$ ならば $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

【証明】 $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a, b) + \|b\|^2$ で, $(a, b) = 0$. $\square$

例題 1

$\mathbb{R}^3$ の標準内積で, $a = {}^t(1, 2, 2)$, $b = {}^t(2, -1, 2)$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ を求めよ.

【解答】 $(a, b) = 2 - 2 + 4 = 4$, $\|a\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, $\|b\| = 3$. よって $\cos \theta = \frac{4}{9}$.

例題 2

区間 $[0, 1]$ 上の関数の内積 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ について, $f = 1$ と $g = x$ のなす角を求めよ.

【解答】 $(1, x) = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$, $\|1\|^2 = \int_0^1 1 \, dx = 1$, $\|x\|^2 = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$.

$$\cos \theta = \frac{1/2}{1 \cdot (1/\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

関数 1 と x は「 30° の角をなす」.

■ 練習問題

- $\mathbb{R}^3$ の標準内積で, $\mathbf{a} = {}^t(1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = {}^t(1, 1, 0)$ について $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ となす角 θ を求めよ.
- ${}^t(1, 1, 0)$ と ${}^t(0, 1, 1)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めよ.
- $\mathbb{R}^2$ の $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$ は内積であることを示せ. (ヒント: $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ を平方完成する.)
- 区間 $[-1, 1]$ 上の内積 $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \, dx$ について, 次を求めよ.
 - $(1, x)$, $(1, x^2)$, (x, x^2)
 - $\|1\|$, $\|x\|$
- 内積空間で, 次の中線定理を示せ. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{b}\|^2$
- (考えてみよう) コーシー・シュワルツの不等式を $\mathbf{a} = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ と $\mathbf{b} = {}^t(1, \dots, 1)$ に使って,

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

を示せ. また, この不等式が「分散 ≥ 0 」と同じことであることを確かめよ (分野「確率・統計」第 4 章 No.2).

■ 練習問題の解答

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- $\mathbf{x} = {}^t(x, y, z)$ として $x + y = 0$, $y + z = 0$. $\mathbf{x} = {}^t(1, -1, 1)$. 正規化して $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} {}^t(1, -1, 1)$.
- (I1)(I2) は式の形から明らか ($a_1b_2 + a_2b_1$ の部分が対称). (I3): $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 = a_1^2 + (a_1 + a_2)^2 \geq 0$ で, 0 になるのは $a_1 = 0$ かつ $a_1 + a_2 = 0$, つまり $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のとき.
- (1) $(1, x) = \int_{-1}^1 x \, dx = 0$, $(1, x^2) = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3}$, $(x, x^2) = \int_{-1}^1 x^3 \, dx = 0$. (1 と x , x と x^2 は直交するが, 1 と x^2 は直交しない.) (2) $\|1\| = \sqrt{2}$, $\|x\| = \sqrt{2/3}$.
- $\|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \pm 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2$ を足すと, $\pm 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ が消える. (平行四辺形の 2 本の対角線の長さの 2 乗の和は, 4 辺の長さの 2 乗の和に等しい.)
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 + \dots + a_n$, $\|\mathbf{b}\|^2 = n$ なので, $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$. 両辺を n^2 で割る. 平均を $\bar{a}$ とすると, 右辺 - 左辺 $= \frac{1}{n} \sum a_i^2 - \bar{a}^2 = \frac{1}{n} \sum (a_i - \bar{a})^2$ は分散で, 0 以上.